Κεφ 5ο

$\mathbb{R}, +, \cdot \qquad + : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (\alpha,\beta) \to \alpha+\beta \quad , \quad \cdot : (\alpha,\beta) \to \alpha\beta$

A_1: $x+y = y+x$, x, y εν $\mathbb{R}$

A_2: $x+(y+z) = (x+y)+z$

A_3: $\exists$ στοιχειο $0 \in \mathbb{R}$: $x+0 = x$

A_4: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x+y=0$ ($x=-y$, $y=-x$ y: αντίθετο του x)

$[x-x = x+(-y)]$

A_5: $xy = yx$

A_6: $x(yz) = (xy)z$

A_7: $(\exists\, 1 \in \mathbb{R})$ $1 \neq 0$: $x \cdot 1 = x$

A_8: $(\forall x \in \mathbb{R}-\{0\})(\exists z \in \mathbb{R})\ x \cdot z = 1$ $\left(\frac{1}{x} , x^{-1}\right)$

A_9: $x(y+z) = xy + xz$

$\leq$, $\geq$ ολική διάταξη στο $\mathbb{R}$

A_{10}: $x \geq y \Rightarrow x+z \geq y+z$

A_{11}: $x>0$ & $y>0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

Συμβολίζουμε:

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x>0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} , x<0\}$

$\mathbb{R}^+_0 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\mathbb{R}^-_0 = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

ΠΡΟΤ: Στο διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

i) Τα στοιχεία 0 και 1 είναι μοναδικά

ii) Για κάθε x το αντίθετο του $-x$ ορίζεται μονοσήμαντα

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ το αντίστροφο του, x^{-1} ή $\frac{1}{x}$ ορίζεται μονοσήμαντα

iv) $x+z = y+z \Rightarrow x = y$

v) $xy = yz$ και $y \neq 0 \Rightarrow x = z$

vi) $x \cdot 0 = 0$

vii) $x(-y) = -xy$

Αποδ

i) Έστω 0 και $\hat{0}$ δύο ουδέτερα στοιχεία της $+$.

$$\hat{0} \overset{0 \text{ ουδ. στοιχ}}{=\!=} \hat{0}+0 \overset{\hat{0} \text{ ουδ. στοιχ.}}{=\!=} 0$$

ii) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $-x$, $\hat{x}$ αντίθετα του x

$$-x = -x+0 = -x + (\underbrace{x+\hat{x}}_{0}) \overset{A_2}{=} (\underbrace{-x+x}_{0}) + \hat{x} = 0 + \hat{x} = \hat{x}$$

iv) $x+z = y+z \Rightarrow (x+z)+(-z) = (y+z)+(-z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x + (\underbrace{z+(-z)}_{0}) = y + (\underbrace{z+(-z)}_{0}) \Rightarrow x+0 = y+0 \Rightarrow x = y.$$

vi) $\underline{x\cdot 0} = x(0+0) = x\cdot 0 + \underline{x\cdot 0} \Rightarrow x\cdot 0 = 0$

vii) $x(-y) \overset{?}{=} -x\cdot y$

$x\cdot y + x(-y) \overset{A_4}{=} x(y+(-y)) = x\cdot 0 \overset{vi)}{=} 0$

Δηλ. το $x(-y)$ είναι το αντίθετο του xy

Άρα $x\cdot(-y) = -xy$

viii) αποδ $x + z = \kappa \overset{?}{\Rightarrow} x = \kappa - z$

$(x+z)+(-z) = \kappa + (-z) \Rightarrow \kappa + \underbrace{(z+(-z))}_{0} = \kappa - z \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \kappa - z$

<u>ΠΡΟΤ.</u> Στο διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

i) $x \in \mathbb{R}^+$ κ' $y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \begin{cases} x+y \in \mathbb{R}^+ \text{ κ'} \\ x\cdot y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

ii) $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

iii) $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^-$

iv) $1 > 0$

v) $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$

vi) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

Απόδ.

i) $x>0 \Rightarrow x+y > 0+y = y > 0$

ii) $\mathbb{R}^- \subseteq \mathbb{R}$, $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{(+)} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \overset{?}{\subseteq} \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \in \mathbb{R}$
- $x = 0$
- ή
- $x \neq 0$
  - $x>0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$
  - $x<0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^-$

iii) $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x>0 \Rightarrow x+(-x) > 0+(-x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 > -x \Leftrightarrow -x < 0$

iv) Έστω ότι $1 \notin \mathbb{R}^+ \xrightarrow[ii)]{1\neq 0} 1 \in \mathbb{R}^- \Rightarrow -1 \in \mathbb{R}$

Άρα $(-1)(-1) \in \mathbb{R}^+$

$(-1)(-1) = -(1(-1)) = -(-1) = 1$ <u>Άτοπο!</u>

vi) $x>0$ και έστω $\frac{1}{x} < 0$

$\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} < x \cdot 0 \Rightarrow 1 < 0$ <u>Άτοπο!</u>

v) <u>$x<y$</u> $\Rightarrow y-x>0 \xrightarrow[A_1)]{z>0} z(y-x)>0 \Rightarrow z(y+(-x))>0$

$\Rightarrow zy + z(-x) > 0 \Rightarrow zy - zx > 0 \Rightarrow \underline{zy > zx} \Rightarrow zx < zy$